La física en problemes

Salvador Estradé i Jordi Vives

L'objectiu d'aquesta secció de la *Revista* és fomentar l'interès per la física entre els estudiants. Per aconseguir-ho demanem al professorat que faci una àmplia difusió d'aquesta proposta entre l'alumnat i l'animi a participar-hi.

En cada número de la *Revista* hi haurà dos problemes proposats: un per a estudiants universitaris i un altre per als de batxillerat. Les millors solucions o les més originals apareixeran publicades en el número següent i als guanyadors se'ls premiarà amb una subscripció gratuïta a la *Revista* durant cinc anys.

Acompanyant la solució, l'alumne ha de fer constar les dades següents: DNI, nom i cognoms, adreça postal, telèfon, adreça electrònica, nivell i centre d'estudis.

Les respostes als problemes proposats en aquest número s'han de fer arribar abans del 15 de juny de 2003 a:

probuni@fismat.ffn.ub.es (nivell universitari)
probsec@fismat.ffn.ub.es (nivell de batxillerat)

Finalment, cal dir que agrairem el fet de rebre —a les mateixes adreces electròniques— tot tipus de suggeriments i propostes per incloure en aquesta secció.

Problema per a l'alumnat de batxillerat

En quin punt de la recta que uneix els centres de la Terra i la Lluna el camp gravitatori és nul? Si situem una massa puntual de 200 kg en repòs en aquest punt i li proporcionem un petitíssim impuls en direcció a la Terra, començarà a caure cap a ella i arribarà a la seva superfície amb una determinada energia cinètica E_{c1}. Si col·loquem una altra massa puntual de 200 kg en repòs en un punt situat a la mateixa distància del centre de la Terra que l'anterior però diametralment oposat, caurà cap a la Terra. L'energia cinètica d'impacte d'aquesta segona massa serà superior, inferior o igual que E_{c1}? Per què? En cas que no sigui igual, quant valdrà la diferència $E_{c2} - E_{c1}$? Negligiu els efectes de la fricció amb l'atmosfera terrestre. Dades: la distància que separa els centres de la Terra i la Lluna és de $3{,}84 \cdot 10^8$ m; $G = 6,6710^{-11}$ N m^2 kg^{-2}; $M_{\text{Terra}} = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg; $M_{\text{Lluna}} = 7,35 \cdot 10^{22}$ kg.

Problema per a l'alumnat universitari

Un observador es troba amb la situació següent. Veu com un regle de longitud L_1 i espessor negligible, paral·lela a l'eix de les x, es mou amb velocitat v_1 sobre l'eix de les y, i veu com un forat de longitud L_2, també paral·lel a l'eix de les x, s'apropa a velocitat v_2 sobre l'eix de les x. En el moment d'encreuar-se, els centres del regle i el forat coincideixen amb l'origen de coordenades del sistema de l'observador i aquest veu que el regle passa just pel forat.

Per a un observador comòbil amb el regle. Com veu el mateix fet? Passa el regle per dintre del forat?

I per a un observador comòbil amb el forat?

En general, hi ha algun observador que no vegi que el regle passa pel forat?

Solució als problemes del número 23 de la *Revista*

Del problema per a l'alumnat de batxillerat

Com que no hem rebut cap resposta suficientment correcta, donem la nostra solució.

La compressió màxima de la molla, d, ha de complir per conservació de l'energia:

$$MgH = Mg(L_0 - d) + \frac{1}{2}Kd^2.$$

La força màxima valdrà:

$$F = Kd = Mg\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2k}{Mg}(H - L_0)}\right). \quad (1)$$

El temps de contacte amb el terra es correspon amb el semiperíode d'oscil·lació

$$t = \pi\sqrt{\frac{M}{k}}. \quad (2)$$

A partir de (1) i (2) es pot veure que:

- Si M disminueix, també ho faran la força màxima i el temps de contacte.
- Si H augmenta, augmentarà la força màxima i no variarà el temps de contacte.

• Si K augmenta, augmentarà la força màxima i disminuirà el temps de contacte.

Del problema per a l'alumnat universitari

Hem d'agrair la col·laboració de Joaquim Agulló, que ens va enviar aquest problema.

Per passar d'un sistema de referència solidari a un objecte giratori a un sistema de referència fix, definim tres angles θ, ψ, ϕ, anomenats *angles d'Euler*, amb unes velocitats de variació $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$, $\dot{\phi}$ conegudes, respectivament, com a velocitats de nutació, precessió i rotació (figura 1). Llavors podem escriure les equacions d'Euler com:

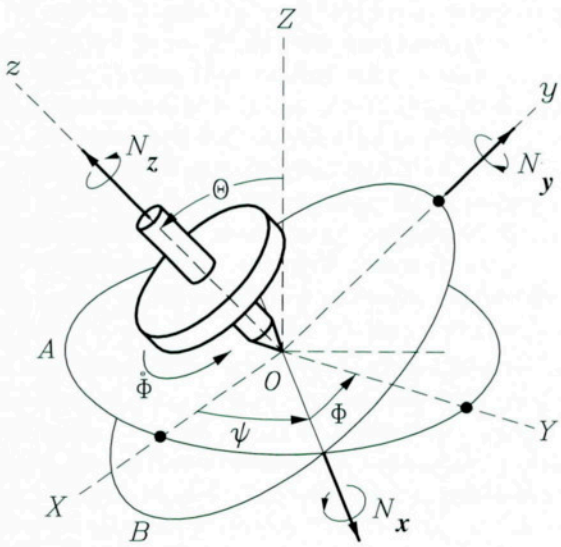

Figura 1: *Definició dels angles d'Euler per passar d'un sistema de referència solidari a un objecte giratori a un sistema de referència fix*

$$N_x = I_o(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2 \sin\theta\cos\theta) + I\dot{\psi}\omega_z \sin\theta$$

$$N_y = \frac{I_o}{\sin\theta}\frac{d}{dt}\left(\dot{\psi}\sin^2\theta\right) - I\dot{\theta}\omega_z, \quad N_z = I\dot{\omega}_z$$

$$\omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\phi},$$

on I és el moment d'inèrcia respecte a l'eix de simetria i I_o el moment d'inèrcia respecte a un eix perpendicular a l'eix de simetria. N_x, N_y i N_z són els parells de força aplicats sobre els eixos x, y, z solidaris a l'objecte.

Un cas particular de les equacions d'Euler és la condició de precessió estacionària. En aquesta condició el rotor gira a velocitat constant $\dot{\phi}$ entorn de l'eix z amb θ i $\dot{\psi}$ constants i, per tant, $\dot{\theta}$, $\ddot{\psi}$ i $\ddot{\phi}$ són zero.

$$N_x = \dot{\psi}\sin\theta\ (I\omega_z - I_o\dot{\psi}\cos\theta)$$
$$N_y = 0$$
$$N_z = 0.$$

En el cas concret del Dynabee tenim, per construcció, dos lligams importants. Primer, si la ranura per la qual es mou l'eix del Dynabee és suficientment estreta, l'angle de nutació θ es pot considerar $\pi/2$. Segon, la condició de rodolar sense lliscar ens imposa un lligam entre ϕ i ψ. Si prenem R_A com el radi de l'anella externa i R_E com el radi de l'eix en el punt de contacte, les longituds obtingudes en rodolar l'eix sobre si mateix $L_E = R_E\ \phi$ i en desplaçar-se per la ranura $L_A = R_A\ \psi$ han de coincidir. I per tant, les velocitats tangencials també:

$$R_E\ \dot{\phi} = R_A\ \dot{\psi}.$$

En aplicar els lligams a les equacions d'Euler obtenim:

$$N_x = I\dot{\phi}\dot{\psi} = \frac{I\ R_A}{R_E}\ \dot{\psi}^2.$$

Aquesta equació s'interpreta com que s'ha d'exercir un parell de forces sobre l'anella en direcció perpendicular a l'eix del Dynabee per mantenir-lo en moviment constant (figura 2). L'equació també es pot interpretar com una equació de moviment que ens determina la velocitat de gir en funció de la força exercida, i, com que és quadràtica, si dupliquem la força exercida, quadruplicarem la velocitat de gir.

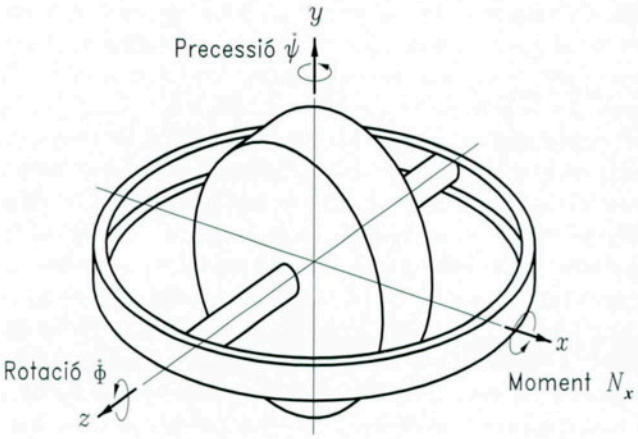

Figura 2: *Parell de forces sobre l'anella en direcció perpendicular a l'eix del Dynabee per mantenir-lo en moviment constant*